Representasi Obyek dengan Fungsi Parametrik

Representasi polygon-mesh dalam beberapa hal amatlah memakan ruang penyimpanan. Suatu permukaan yang penuh dengan lekukan apabila direpresentasikan dengan polygon-mesh bisa memerlukan begitu banyak poligon. Semakin kita mengharapkan representasi yang presisi dengan bentuknya semakin halus ukuran tiap poligon. Dalam hal kurva maka suatu kurva penuh dengan liku-liku akan memerlukan begitu banyak garis untuk merepresentasikannya secara presisi.

Fungsi parametrik dapat digunakan untuk merepresentasikan obyek-obyek permukaan atau kurva demikian. Suatu kurva dapat dipandang sebagai sejumlah titik yang memenuhi fungsi persamaan $P(t)$ dengan parameter t yang berharga dalam range [0, 1]. Untuk kurva tiga dimensi maka $P(t)$ terdiri atas tiga komponen $x(t)$, $y(t)$ dan $z(t)$ yang masing-masing fungsi dari variabel parameter t. Fungsi polinomial berderajat n secara matematis dapat mengaproksimasi berbagai fungsi. Dalam pembahasan berikutnya kita akan memepelajari fungsi kurva parametrik dengan polinomial berderajar tiga atau disebut fungsi kurva parametrik kubik. Derajat yang lebih tinggi dari tiga bisa lebih presisi bisa juga terlalu presisi sehingga terbentuk kerut-kerut yang tidak d iharapkan selain komputasinya yang jauh lebih banyak. Sementara, derajat yang kurang dari tiga akan menghasilkan kurva-kurva yang lebih kasar.

Dalam hal permukaan, setiap permukaan dapat dipandang sebagai sejumlah titik yang memenuhi fungsi persamaan $P(s, t)$ dengan parameter s dan t masing-masing dalam range [0, 1]. Untuk pemukaan tiga dimensi maka $P(s, t)$ terdiri atas tiga komponen $x(s, t)$, $y(s, t)$ dan $z(s, t)$. Fungsi permukaan yang akan dibahas adalah fungsi permukaan parametrik kubik.

Kurva Parametrik Kubik

Kurva dinyatakan dalam persamaan parametrik polinomial berderajat tiga (kubik). Jadi titik-titik pada kurva direpresentasikan $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ dengan t berada dalam range [0, 1]. $P(t)$ untuk suatu t adalah koordinat titik pada kurva dan koefisien tersebut masing-masing juga adalah vektor $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, $c = (c_x, c_y, c_z)$, dan $d = (d_x, d_y, d_z)$.

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$
$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$
$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

Yang dapat dituliskan dalam notasi perkalian matriks sebagai

$$P(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

Atau disingkat $P(t) = T.C$

Dalam penggambaran kurva tersebut t diinkremen dari 0.0 hingga 1.0 dengan inkremen $d = 1/n$, jika n jumlah sampling pada kurva. Harga-harga $x(t)$, $y(t)$ dan $z(t)$ dapat dihitung secara naif dari fungsi polinomialnya tersebut tetapi untuk efisiensi maka kita dapat menggunakan metoda "forward difference" $\Delta P(t)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(t+d) &= a(t+d)^3 + b(t+d)^2 + c(t+d) + d \\ &= P(t) + 3adt^2 + 3ad^2t + ad^3 + 2bdt + bd^2 + cd \\ &= P(t) + \Delta P(t) \end{aligned}$$

dengan $\Delta P(t) = 3adt^2 + (3ad^2 + 2bd)t + (ad^3 + bd^2 + cd)$ yang masih merupakan polinomial berderajat dua. Dengan Forward difference maka diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta P(t+d) &= 3ad(t+d)^2 + (3ad^2 + 2bd)(t+\delta) + (ad^3 + bd^2 + cd) \\ &= \Delta P(t) + 6ad^2t + 6ad^3 + 2bd^2 \\ &= \Delta P(t) + \Delta^2 P(t) \end{aligned}$$

dengan $\Delta^2 P(t) = 6ad^2t + 6ad^3 + 2bd^2$ yang masih merupakan polinomial berderajat satu. Dengan forward difference maka diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta^2 P(t+d) &= 6ad^2(t+d) + 6ad^3 + 2bd^2 \\ &= \Delta^2 P(t) + 6ad^3 \\ &= \Delta^2 P(t) + \Delta^3 P(t)\end{aligned}$$

dengan $\Delta^3 P(t) = 6ad^3$ suatu konstanta.

Pada saat $t = 0$ maka

$P(0) = d$

$\Delta P(0) = ad^3 + bd^2 + cd$

$\Delta P^2(0) = 6ad^3 + 2bd^2$ dan

$\Delta^3 P(0) = 6ad^3$.

Maka algoritma perhitungan dengan metoda forward difference adalah sebagai berikut.

```
delta = 1/n;delta2 = delta*delta; delta3 = delta*delta2;
x0 = dx;
Dx = ax*delta3 + bx*delta2 + cx*delta;
DDx = 6*ax*delta3 + 2*bx*delta2;
DDDx = 6*ax*delta3;
y0 = dy;
Dy = ay*delta3 + by*delta2 + cy*delta;
DDy = 6*ay*delta3 + 2*by*delta2;
DDDy = 6*ay*delta3;
z0 = dz;
Dz = az*delta3 + by*delta2 + cy*delta;
DDz = 6*az*delta3 + 2*by*delta2;
DDDz = 6*az*delta3;
t = 0;
for (i=0; i < n; i++) {
    x += Dx; Dx += DDx; DDx += DDDx;
    y += Dy; Dy += DDy; DDy += DDDy;
    z += Dz; Dz += DDz; DDz += DDDz;
    draw3Dline(x0, y0, z0, x, y, z);
    x0 = x; y0 = y; z0 = z;
    t += delta;
}
```

Pertanyaannya selanjutnya adalah bagaimana formulasi untuk mendapatkan koefisien *a*, *b*, *c*, dan *d* tersebut. Metoda-metoda yang akan dibahas berikut ini adalah berbagai cara untuk menghasilkan koefisien fungsi parametrik tersebut dari sejumlah titik yang dijadikan titik-titik kontrol kurva. Dapat dibedakan antara metoda yang berifat interpolasi yang mana titik-titik kontrol tersebut adalah bagian dari kurva, dan metoda yang bersifat aproksimasi, yang mana titik-titik kontrol tersebut tiak perlu dilalui garis kurva (berfungsi sebagai pengontrol lengkungan kurva).

Kontinyuitas

Pada umumnya karena digunakan polinomial dengan derajat tertentu maka dari sederetan titik-titik kontrol kurva terbentuk atas sejumlah segmen kurva. Masing-masing segmen adalah hasil fungsi parametrik dengan derajat polinomial yang bersangkutan. Yang penting untuk diperhatikan adalah masalah kontinyuitas di antara persambungan segmen tersebut.

- Kontinyuitas parametrik orde-nol atau C^0 adalah kontinyuitas dimana kedua segmen yang berhubungan bertemu di satu titik.
- Kontinyuitas parametrik orde-pertama atau C^1 adalah kontinyuitas dimana tangen (atau turunan pertama) kedua segmen yang berhubungan di titik pertemuannya adalah sama.

- Kontinyuitas parametrik orde-kedua atau C^2 adalah kontinyuitas dimana turunan pertama dan kedua kedua segmen yang berhubungan di titik pertemuannya adalah sama.
- Kontinyuitas geometris orde-nol atau G^0 adalah tepatnya sama dengan kontinyuitas parametrik orde-nol.
- Kontinyuitas geometris orde-pertama atau G^1 adalah kontinyuitas dimana tangen (atau turunan pertama) kedua segmen yang berhubungan di titik pertemuannya adalah proporsional (arah sama tetapi bisa berbeda magnitude).
- Kontinyuitas geometris orde-kedua atau G^2 adalah kontinyuitas dimana dimana turunan pertama dan kedua kedua segmen yang berhubungan di titik pertemuannya adalah proporsional (arah sama tetapi bisa berbeda magnitude).

Kurva Hermite

Diberikan sederatan titik kontrol kurva $p_1, p_2, \ldots, p_n$ segmen kurva Hermite adalah kurva interpolasi dari dua buah titik kontrol p_k dan p_{k+1}. Untuk membentuk suatu kurva pada sederetan titik maka segmen demi segmen dihasilkan dari pasangan titik p_k dan p_{k+1} yang berturut-turut. Kurva ini mensyaratkan juga diketahuinya vektor-vektor tangen terhadap variabel parameter t dari titik-titik kontrol tersebut yaitu p'_k dan p'_{k+1}. Arah dan magnitude tangen-tangen ini akan membentuk arah dan kekuatan lengkungan di titik yang bersangkutan. Dengan diberikannya tangen dari titik-titik kontrol tersebut maka akan terjamin untuk memenuhi C^1.

Sebagai turunan pertama dari fungsi parametrisnya maka fungsi tangen ini.

$$P'(t) = 3at^2 + 2bt + c.$$

Dengan memasukkan t=0 dan t=1 maka diperoleh empat persamaan berikut

$$P(t=0) = d = p_k$$
$$P'(t=0) = c = p'_k$$
$$P(t=1) = a + b + c + d = p_{k+1}$$
$$P'(t=1) = 3a + 2b + c = p'_{k+1}$$

Persamaan-persamaan di atas bisa dituliskan kembali dalam notasi matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ p'_k \\ p'_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Sehingga koefisien-koefisien tersebut dapat dihitung sebagai

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ p'_k \\ p'_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ p'_k \\ p'_{k+1} \end{bmatrix}$$

Matriks 4x4 di atas kita sebut matriks Hermite M_H. Dengan demikian pula maka persamaan parametris kurva Hermite di antara P_k dan P_{k+1} adalah

$$P(t) = [t^3 \ \ t^2 \ \ t \ \ 1] \, M_H \, [p_k \ \ p_{k+1} \ \ p'_k \ \ p'_{k+1}]^T$$

M_H adalah suatu matriks konstan.

Dalam sejumlah formulasi persamaan tersebut sering juga dituliskan dalam notasi lain yang ekivalen sebagai berikut.

$$P(t) = p_k H_0(t) + p_{k+1} H_1(t) + p'_k H_2(t) + p'_{k+1} H_3(t)$$

Dengan

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$
$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$
$H_3(t) = t^3 - t^2$

yang dinamakan *blending function* karena fungsinya "mencampur" keempat harga (dua koordinat titik kontrol serta kedua tangennya) menjadi suatu fungsi paramteris. Kurva ini amat bermanfaat untuk aplikasi perancangan model secara interaktif yang mana informasi tangen tersebut bisa diberikan secara interaktif pula. Sayangnya, dalam aplikasi yang lebih umum informasi tangen hampir tidak mungkin ada.

Kurva Cardinal

Kurva ini dapat dikatakan sebagai aproksimasi dari kurva hermit dengan menginterpolasi tangen tersebut dengan vektor dari titik-titik kontrol sebelum dan sesudah titik yang bersangkutan. Jadi arah tangen di titik p_k di aproksimasi dengan vektor $p_{k-1} \rightarrow p_{k+1}$ dengan besarnya diberi suatu faktor pembobot berisikan parameter c sebagau pengatur tegangan kurva pada titik. Khusus untuk segmen kurva pertama karena titik p_0 tidak ada, titik ini biasanya tangen diaproksimasi dengan vektor dari titik p_1 ke p_2. Juga untuk segmen terakhir karena titik p_{n+1} tidak ada maka tangen diaproksimasi dengan ventor dari titik p_{n-1} ke p_n. Jadi pada kedua segmen ini perlu ada perlakuan khusus. Namun secara umum berlaku persamaan berikut.

$P(t=0) = d = p_k$
$P(t=1) = a + b + c + d = p_{k+1}$
$P'(t=0) = (p_{k+1} - p_{k-1})(1- c)/2$
$P'(t=1) = (p_{k+2} - p_k)(1- c)/2$

Selanjutnya akan diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut (penurunan tidak dijelaskan)

$$P(t) = [t^3 \;\; t^2 \;\; t \;\; 1]\, M_C\, [p_{k-1} \;\; p_k \;\; p_{k+1} \;\; p_{k+2}]^T$$

Dengan $M_C = \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $s = (1- c)/2$

Yang juga dapat dituliskan sebagai

$$P(t) = p_{k-1}C_0(t) + p_kC_1(t) + p_{k+1}C_2(t) + p_{k+2}C_3(t)$$

dengan

$C_0(t) = -st^3 + 2st^2 - st$
$C_1(t) = (2-s)t^3 + (s-3)t^2 + 1$
$C_2(t) = (s-2)t^3 + (3-2s)t^2 + st + 1$
$C_3(t) = st^3 - st^2$

adalah *blending function* untuk kurva Cardinal ini berdasarkan empat posisi titik kontrol.

Parameter c adalah suatu harga yang *predefined* untuk mengontrol tegangan dari kurva. Bayangkan seperti tali karet Jika $c < 0$ maka terbentuk kurva yang "longgar" sementara jika $c > 0$ maka terbentuk kurva yang "kencang".

Kurva Spline Catmull-Rom atau kurva spline Overhauser

Kurva ini adalah kurva Cardinal dengan $c = 0$ sehingga

$$P(t) = [t^3 \;\; t^2 \;\; t \;\; 1]\, M_{CR}\, [p_{k-1} \;\; p_k \;\; p_{k+1} \;\; p_{k+2}]^T$$

Dengan $M_{CR} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Kurva Kochanek-Bartels

Seperti halnya kurva Cardinal Kurva ini mengaproksimasi tangen dari kurva Hermit dengan posisi titik-titik sekitarnya. Namun, formulasi aproksimasi kurva ini lebih kompleks dari kurva Cardinal serta menyediakan lebih banyak lagi parameter pengatur bentuk kurva: K=kontinyuitas, L=bias, dan M=tensi.

$P(t=0) = d = p_k$
$P(t=1) = a + b + c + d = p_{k+1}$
$P'(t=0) = (1- M)\ [(p_k - p_{k-1})\ (1+b)(1-y)/2 + (p_{k+1} - p_k)\ (1-L)(1+K)]/2$
$P'(t=1) = (1- M)\ [(p_{k+1} - p_k)\ (1+b)(1-y)/2 + (p_{k+2} - p_{k+1})\ (1-L)(1+K)]/2$

Parameter L dan K berperanan dalam “tarik-menarik” bentuk kurva di sebelah kiri dan kanan suatu titik kontrol. Dengan adanya parameter-parameter terserbut maka segmen kurva dengan segmen kurva lain bisa dibuat kontinyu atau tidak kontinyu karena magnitude aproksimasi tangen pada suatu titik kontrol menjadi tidak sama pada setiap segmen. Namun dengan adanya parameter ini maka perancang model dapat lebih mengendalikan betuk dari kurva.

Kurva Bezier Kubik

Apabila pada kurva-kurva sebelumnya segmen-segmen kurva terformulasi pada setiap pasangan titik-titik kontrol yang berturutan dengan informasi bantuan titik-titik kontrol sekitarnya untuk mengaproksimasi tangen. Pada kurva Bezier suatu segmen kurva menggunakan empat titik kontrol: titik interpolasi adalah titik pertama dan keempat sementara titik kedua dan ketiga untuk aproksimasi tangen dengan magnitude dikalikan faktor 3. Jadi untuk segmen ke-k yang terbentuk titik-titik kontrol p_{3k+1}, p_{3k+2}, p_{3k+3}, dan p_{3k+4} didefinisikan

$P(0) = p_{3k+1}$
$P(1) = p_{3k+4}$
$P'(0) = 3(p_{3k+2} - p_{3k+1})$
$P'(1) = 3(p_{3k+4} - p_{3k+3})$

Diperoleh

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_H \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{3k+1} \\ p_{3k+2} \\ p_{3k+3} \\ p_{3k+4} \end{bmatrix}$$

Atau bisa dituliskan

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_B \begin{bmatrix} p_{3k+1} \\ p_{3k+2} \\ p_{3k+3} \\ p_{3k+4} \end{bmatrix}, \text{ dengan } M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk kurva akan mengambil ruang di antara poligon konveks yang terbentuk oleh keempat titik kontrol tersebut maka poligon tersebut sering disebut *convex-hull*.

Segmen-segmen pasti bersambungan karena titik kontrol keempat dari setiap segmen adalah titik kontrol pertama dari segmen berikutnya. Kontinyuitas C1 antar segmen kurva dapat dicapai dengan “mengatur” titik kontrol ketiga dan keempat dari setiap segmen segaris dengan titik kontrol pertama dan kedua dari segmen berikutnya. C2 dapat tercapai apabila titik keempat segmen (atau titik pertama segmen berikutnya) itu tepat ditengah antara titik ketiga segmen ybs dengan titik kedua segmen berikutnya.

Persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk

$P(t) = p_{3k+1}BEZ_{0,3}(t) + p_{3k+2}BEZ_{1,3}(t) + p_{3k+3}BEZ_{2,3}(t) + p_{3k+4}BEZ_{3,3}(t)$

dengan

$BEZ_{0,3}(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = (1-t)^3$
$BEZ_{1,3}(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t = 3t(1-t)^2$
$BEZ_{2,3}(t) = -3t^3 + 3t^2 = 3t^2(1-t)$
$BEZ_{3,3}(t) = t^3$

adalah *blending function* dari kurva Bezier kubik berdasarkan empat titik kontrol. Fungsi-fungsi ini sering pula disebut polinomial-polinomial Bernstein.

Formulasi Secara umum kurva Bezier bisa dikembangkan ke kurva polinomial lebih tinggi menggunakan (m+1) buah titik kontrol sebagai

$P(t) = \sum p_{3k+\mathrm{m}} BEZ_{\mathrm{m,p}}(t)$

dengan

$BEZ_{\mathrm{m,p}}(t) = C(p, m)\, t^m (1-t)^{p-m}$,

dan $C(p, m)$ adalah koefisien Binomial. Kurva ini akan melalui titik pertama dan terakhir dari (m+1) titik kontrolnya serta akan selalu berada di dalam *convex-hull* yang terbentuk dari titik-titik kontrolnya tersebut. Fungsi-fungsi tersebut yang menjamin bahwa kurva berada dalam convex-hull karena total dari fungsi-fungsi itu adalah 1.

Kurva Natural Cubic Spline

Spline ini memenuhi kontinyuitas C^0, C^1, dan C^2 yang berarti lebih halus dari keluarga kurva Hermite. Namun polinomial yang dihasilkan dihitung dari seluruh *n* titik kontrolnya. Karena disyaratkan kontinyuitas hingga turunan kedua maka pada setiap titik kontrol interior (bukan titik ujung) terdapat empat persamaan: (1) kedua segmen bertemu di titik tersebut, (2) kedua ruas memiliki tangen yang sama pada titik pertemuan, (3) kedua ruas memiliki .

Kurva Uniform Nonrational BSpline

Kurva Nonuniform Nonrational BSpline