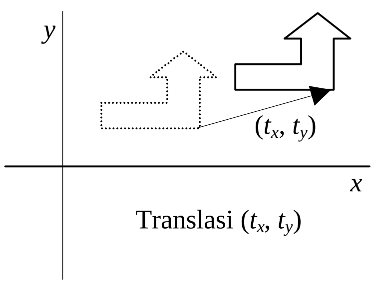
Topik: Transformasi Geometris 2 Dimensi

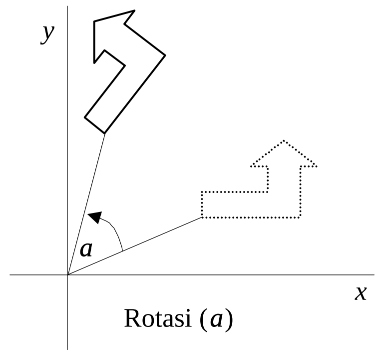
Dalam banyak aplikasi grafika suatu obyek mungkin mengalami transformasi secara geometris dari representasi asalnya. Untuk kali ini masalah transformasi dibatasi untuk ruang dua dimensi. Transformasi-transformasi tersebut pada dasarnya dapat merupakan transformasi komposit dari transformasi-transformasi yang lebih sederhana atau kita sebut transformasi-transformasi dasar.

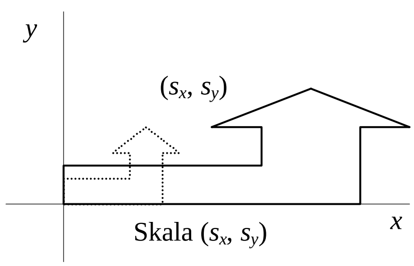
Transformasi-transformasi Dasar

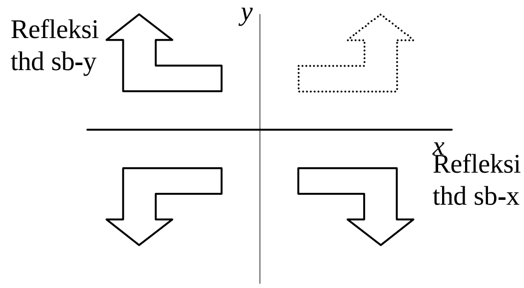
Transforamsi-transformasi dasar tersebut adalah:

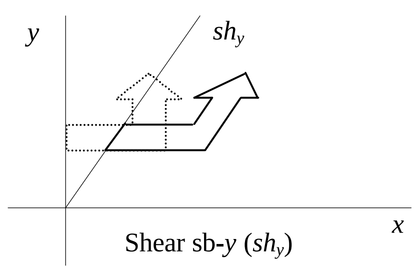
- Translasi (pergeseran)
- Rotasi (putaran) pada titik origin
- Skala (perubahan skala ukuran)
- Refleksi (pencerminan) terhadap sumbu *x* atau sumbu *y*
- Shear (skala proporsional) terhadap sumbu *x* atau sumbu *y*











Secara matematis maka suatu translasi dengan arah (t_x, t_y) pada suatu titik di (x, y) akan memindahkan titik ke (x',y') dengan hubungan:

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

Sementara itu, rotasi suatu titik (x, y) sebesar sudut a pada titik origin akan menempatkan titik di (x',y') dengan hubungan:

$x' = x\cos a - y \sin a$

$y' = x\sin a + y \cos a$

Catatan: sudut bergarga positif maka rotasi berlawanan arh dengan jarum jam (counter clockwise) sementara sudut negatif searah dengan jarum jam (clockwise).

Lalu, skala (s_x, s_y) suatu titik (x, y) akan menempatkan titik di (x',y') dengan hubungan:

$x' = x\, s_x$

$y' = y\, s_y$

Refleksi suatu titik (x, y) terhadap sumbu x akan menempatkan titik di (x',y') dengan hubungan:

$x' = x$

$y' = -y$

Dan, shear terhadap sumbu y dengan faktor s akan menempatkan titik di (x',y') dengan hubungan:

$x' = x + y\, s$

$y' = y$

Transformasi Komposit dan Sistem Koordinat Homogen

Suatu transformasi adalah merupakan komposisi dari sejumlah transformasi dasar di atas. Misalnya jika rotasi dilakukan pada suatu titik rotasi (pivot point) yang bukan origin maka transformasi ini dapat dilakukan dengan melakukan translasi pivot point ke titik origin, lalu melakukan rotasi terhadap titik origin, lalu hasilnya ditranslasikan kembali ke pivot point. Dalam bentuk matematisnya itu komputasi transformasi komposit seperti itu memerlukan komputasi-komputasi masing-masing transformasi dasar tersebut.

Agar dapat dibentuk representasi yang lebih umum maka digunakan sistem koordinat homogen. Suatu titik (x, y) di dalam sistem koordinat homogen ini menjadi suatu matriks kolom $[x_h \;\; y_h \;\; h]^T$ dengan

$x = x_h/h$

$y = y_h/h$

$h \neq 0$

Dalam sistem koordinat ini maka setiap transformasi di atas dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks transformasi 3x3. Operasi transformasi suatu titik adalah perkalian matriks antara matriks transformasi dengan matriks kolom dari titik ybs sbb.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & n_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriks translasi $T(t_x, t_y)$ adalah:

$$T(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks rotasi $R(a)$ adalah:

$$R(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks Skala $S(s_x, s_y)$ adalah:

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & x_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks refleksi terhadap sumbu x, Ref_x, dan matriks refleksi terhadap sumbu y, Ref_y, adalah:

$$Ref_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Ref_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

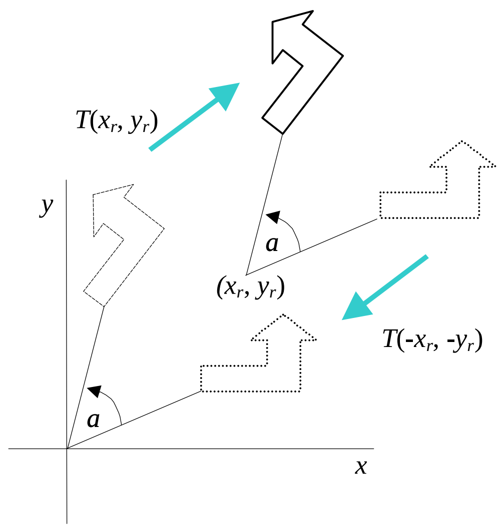
Dan, matriks shear terhadap sumbu y dengan faktor sh_y , $\mathrm{Sh}_y(s)$ adalah:

$$Sh_x = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena suatu transformasi komposit pada suatu titik itu dapat dipandang sebagai sejumlah transformasi dasar yang terjadi pada titik tsb. maka matriks dari transformasi komposit adalah hasil perkalian dari matriks-matriks transformasi dasar yang bersangkutan.

$$M_{\text{komposit}} = M_n \ldots M_2\, M_1$$

Contoh transformasi yang merupakan rotasi di titik (x_r, y_r) dengan sudut a. Transformasi ini dapat dipandang sebagai sejumlah transformasi dasar:
Translasi dari (x_r, y_r) ke titik origin $\rightarrow T(-x_r, -y_r)$
Rotasi di titik origin dengan sudut $a \rightarrow R\,(a)$
Translasi dari titik origin ke $(x_r, y_r) \rightarrow T(x_r, y_r)$



Matriks transformasinya adalah:

$$M = T(x_r, y_r)R\,(a)T(-x_r, -y_r)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & -x_r \cos a + y_r \sin a \\ \sin a & \cos a & -x_r \sin a + y_r \cos a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalam aplikasinya di grafika komputer kita mungkin akan mentransformasikan sejumlah besar titik dengan transformasi yang sama. Dengan representasi koordinat homogen serta matriks transforamsi ini maka transformasi komposit dapat dilakukan dengan menghitung matriks transformasinya terlebih dahulu

$$= \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & -x_r \cos a + y_r \sin a + x_r \\ \sin a & \cos a & -x_r \sin a + y_r \cos a + y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kemudian memperkalikan setiap titik tersebut dengan matriks ini. Dalam representasi fungsi transformasi biasa maka setiap titik perlu diperkalikan ke masing-masing fungsi transformasi dasarnya secara tidak efisien.

Walau pun secara konseptual dalam sistem koordinat homogen perkalian matriks dengan titik tersebut adalah perkalian matriks 3x3 dengan matriks 3x1, sbb. Dalam pemrogramannya bisa diefisienkan dengan menggantinya dengan perkalian berikut ini.

$x' = m_{11}\, x + m_{12}\, y + m_{13}$

$y' = m_{21}\, x + m_{22}\, y + m_{23}$

yang hanya terdiri atas empat perkalian dan empat penjumlahan saja. Perkalian baris terakhir diabaikan karena akan selalu menghasilkan harga skalar 1 (catatan: dalam hal transformasi 3D serta proyeksi perspektif yang akan di bahas kemudian hal ini tidak berlaku).