MATRIKS

Create by Luke

Definisi Matriks

Sebuah matrik adalah serangkaian elemen dalam bentuk persegi panjang. Elemen ke-(*i,j*) a_{ij} dari matriks A berada dibaris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari rangkaian tersebut. Order (ukuran) dari sebuah matrik dikatakan sebesar (*m x n*) jika matriks tersebut memiliki *m* baris dan *n* kolom. Misalnya,

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

adalah sebuah matriks (s x m), notasi lain yang cukup singkat adalah :

A = (a_{ij}) atau A_{mn} = (a_{ij})

Jenis-jenis Matriks

Ada berbagai jenis matriks diantaranya adalah :

a Matriks bujur sangkar adalah sebuah matriks dimana m = n.

b Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar dimana semua elemen diagonal adalah satu dan semua elemen diluar diagonal adalah nol; yaitu :

$$a_{ij} = 1, \text{ untuk } I = j$$

$$a_{ij} = 0, \text{ untuk } I \neq j$$

misalnya, sebuah matriks identitas (3x3) diketahui :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c Vektor baris adalah sebuah matriks dengan satu baris dan n kolom.

d Vektor kolom adalah sebuah matriks dengan m baris dan satu kolom.

e Matriks A^T disebut tranpose dari A jika elemen a_{ij} dalam A adalah sama dengan elemen a_{ji} dari A^T untuk semua I dan j, misalnya, jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

maka

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

secara umum , A^T diperoleh dengan menukar baris dan kolom dari A. Akibatnya jika A memiliki order (m x n), A^T memiliki order (m x n).

f Matriks B= 0 disebut matriks nol jika setiap elemen dari B sama dengan nol.

g Dua buah matriks A = $\|a_{ij}\|$ dan B= $\|b_{ij}\|$, dikatakan sama jika dan hanya jika keduanya memiliki order yang sama dan setiap elemen a_{ij} adalah sama dengan b_{ij} yang bersesuaian untuk semua i dan j.

Operasi Matriks

Dalam matriks hanya penambahan, pengurangan dan perkalian yang di definisikan. Pembagian walaupun tidak didifinisikan, digantikan dengan konsep inversi.

Penambahan dan pengurangan matrik

Dua matriks A = $\| a_{ij}\|$ dan B = $\|b_{ij}\|$ dapat ditambahkan jika keduanya memiliki order yang sama(mx n). Jumlah D = A + B diperoleh dengan menambahkan elemen-elemen yang bersesuaian. Jadi,

$\| d_{ij} \|_{m \times n} = \| a_{ij} + b_{ij} \|_{m \times n}$

jika kita mengasumsikan bahwa matriks A, B dan C memiliki order yang sama,

maka :

$A \pm B = B \pm A$ (hukum komutatif)

$A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C$ (hukum asosiatif)

$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

Perkalian matriks

Dua matriks A = $\| a_{ij} \|$ dan B = $\| b_{ij} \|$ dapat dikalikan dalam urutan AB jika dan hanya jika jumlah kolom A adalah sama dengan jumlah baris B. Yaitu, jika A memiliki order (m x r), maka B harus memiliki order (r x n), dimana m dan n adalah ukuran sembarang.

Anggaplah D=AB. Maka D memiliki order (m x n), dan elemen d_{ij} diketahui

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik} B_{kj} \text{ untuk semua i dan j}$$

misalnya, jika

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$$

maka

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (axe + bxh) & (axf + bxi) & (axg + bxi) \\ (cxe + dxh) & (cxf + dxi & (cxg + dxj) \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa secara umum, AB ≠ BA sekalipun BA didefinisikan.

Perkalian matriks mengikuti sifat-sifat umum berikut ini :

a $I_m A = A I_m = A$, dimana I adalah matriks identitas

b (AB)C=A(BC)

c C(A + B) = CA + CB

d (A + B)C =AC + AB

e $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, α adalah skalar

Determinan

Determinan suatu matrik adalah skalar (Bilangan) yang diperoleh dari pengoprasian elemen-elemen matriks secara spesifik.

Setiap matrik bujur sangkar C_{sxs} selalu memiliki nilai tertentu, disebut sebagai nilai-nilai determinannya serta diberi tanda | C |. Determinan dari setiap submatrik bujur sangkar dari matrik C disebut sebagai minor dari C. Jadi misalnya ordo dari C dikurangi dari s x s menjadi r x r, maka akan didapatkan determinan dari submatrik r x r yang merupakan minor dari C. Suatu minor yang didapat dari submatriks yang elemen-elemen diagonalnya juga merupakan diagonal dari matriks C disebut minor pokok (principal minor).

Kofaktor K_{ij} dari elemen C_{ij} dalam matriks Cs x s adalah $(-1)^{i+j}$ kali determinan dari minor berordo s-1, yang diperoleh dengan jalan menghilangkan baris ke i dan kolom ke j dari matriks C. Jadi kofaktor adalah minor dengan tanda + atau -.

Contoh :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

maka kofaktor untuk elemen c_{32} yaitu K_{32} :

$$K_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

besarnya determinan |C| dapat dihitung melalui formula :

$$|C| = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} K_{ij} \qquad \text{..................(6.1)}$$

bila digunakan ekspansi melalui elemen-elemen kolom ke i dan

$$|C| = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} K_{ij}$$

bila digunakan ekspansi melalui elemen-elemen kolom ke j.

untuk s = 1 maka | C | = c_{11} . berdasarkan hal ini maka rumus diatas dapat disederhanakan ke dalam bentuk :

Untuk s = 2 :

$$|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}$$

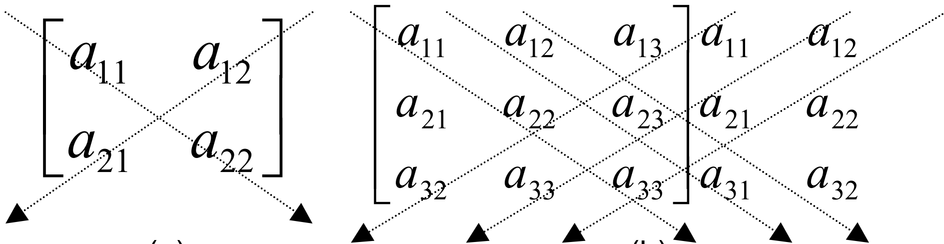
Untuk s = 3, dapat dikerjakan melalui elemen-elemen dari baris pertama sebagai berikut :

$$|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$= c_{11} \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} - c_{12} \begin{vmatrix} c_{21} & c_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + c_{13} \begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix}$$

$$= c_{11}(c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) - c_{12}(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) + c_{13}(c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31})$$

atau secara mudah dapat digambarkan dengan rumus sarus :



(a) (b)

gambar 6.1 : Ilustrasi rumus sarus

Pada gambar 6.1 a dihasilkan $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Pada gambar 6.1 b dihasilkan :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Untuk s > 3 perhitungannya akan menjadi lebih rumit. Dalam hal ini beberapa sifat determinan seperti diuraikan berikut ini akan banyak menolong :

a Jika setiap elemen dari sebuah kolom atau sebuah baris adalah nol, maka nilai determinan adalah nol.

b Nilai determinan tidak berubah jika baris dan kolom dipertukarkan.

c Jika B diperoleh dari A dengan mempertukarkan setiap dua barisnya(atau kolomnya), maka |B| = - |A|.

d Jika dua baris (atau kolomnya) dari A adalah identik, maka |A| = 0.

e Nilai |A| tetap sama jika skalar α kali satu vektor kolom(atau sebuah baris) dari sebuah determinan dikalikan dengan skalar α, nilai determinan tersebut dikalikan dengan α.

f Jika A dan B adalah dua matriks bujur sangkar maka :

|AB| = |A| |B|

Persamaan Linear dan Determinan

Pandanglah n persamaan linear dengan n variabel yang tidak diketahui : $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j,\ \text{i} = 1, 2, 3, \ldots,\text{n} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.2)$$

Kita misalkan rank suatu matriks koefisien A = n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ : & : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ranks matriks lengkap

$$(A,b) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ : & : & : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

juga sama dengan n, karena hanya ada n baris .

Persamaan (2.2) dapat dipecahkan, jika dan hanya jika rank matriks koefisien sama dengan rank matriks lengkap. Kemudian hanya ada satu jawab saja untuk x_1, x_2, ..,x_n karena ruang jawab dimensi n – n = 0.

Karena rank A = n, maka semua baris-baris (kolom-kolom)bebas, jadi determinan A= $|a_{ij}|$ = 0.

Untuk menetukan x_k kita kalikan persamaan ke i dari (I) dengan A_{ik} , yaitu kofaktor dari unsur a_{ik}, yaitu kofaktor dari unsur a_{ik}, dimana i = 1, 2 ,3….n dan k tetap.

Jadi :

$$A_{1k} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} k_j = A_{1k} b_1$$

$$A_{2k} \sum_{j=1}^{n} a_{2j} k_j = A_{2k} b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{nk} \sum_{j=1}^{n} a_{nj} k_j = A_{nk} b_n$$

jika persamaan-persamaan ini dijumlahkan, maka

$x_1(a_{11}A_{1k} + a_{21}A_{2k} +\ldots+ a_{n1}A_{nk}) + x_2(a_{12}A_{1k} + a_{22}A_{2k} +\ldots+ a_{n2}A_{nk}) + x_k(a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} +\ldots+ a_{nk}A_{nk}) + x_n(a_{1n}A_{1k} + a_{2n}A_{2k} +\ldots+ a_{nn}A_{nk}) = A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots+ A_{nk}b_{n.}$

Koefisien-koefisien dari $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ sama dengan nol dan koefisien dari x_k sama dengan D. Ruas kanan ialah determinan yang terjadi, jika kolom ke-k diganti dengan bilangan-bilangan tetap pada ruas kanan persamaan (1) dan diberi notasi D_k.

jadi, karena $D \neq 0$: $x_k = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} A_{ik} b_1}{D} = \dfrac{D_k}{D}$ dimana k = 1, 2, 3, …,n

hasil ini disebut Peraturan Cramer. Peraturan cramer hanya dapat dipakai, jika determinan koefisien tidak nol.

Invers Matriks

Bila harga determinan dari matriks $C_{sxs} = 0$, maka matriks C dikatakan sebagai matriks singular. Bila $|C| \neq 0$ maka matriksnya dikatakan nonsingular.

Bila K_{ij} adalah kofaktor dari elemen c_{ij} dalam matriks C: kemudian kita bentuk matriks C^* yang merupakan perputaran dari matriks dengan kofaktor-kofaktor tersebut sebagai elemen-elemennya :

$$C^* = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \ldots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \ldots & K_{n2} \\ : & : & : & : \\ K_{1n} & K_{2n} & \ldots & K_{nn} \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.3)$$

maka matriks C^* diatas disebut sebagai matriks ajugat (adjugate matrix) dari C.

Invers dari matriks C yaitu C^{-1} dapat didefinisikan sebagai : $C^{-1} = \dfrac{C^*}{|C|}$

Bila matriks C merupakan matriks singular dimana $|C| = 0$, maka C^{-1} tidak dapat diselesaikan. Perlu diingat pula bahwa invers suatu matriks hanya berlaku bagi matriks bujur sangkar saja.

Beberapa sifat invers matriks yang banyak berguna, antara lain :

a $(C`)^{-1} = (C^{-1})`$

b $(C^{-1})^{-1} = C$

c $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$