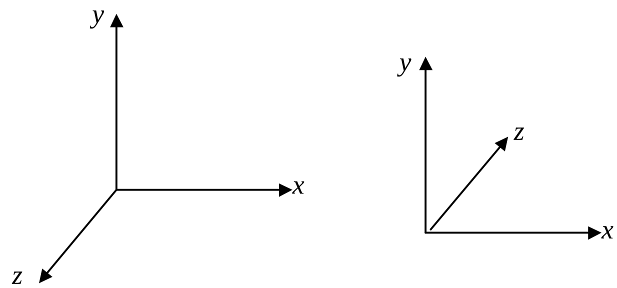
Topik: Transformasi Geometris 3D

Dalam ruang dua dimensi suatu titik akan berada pada suatu posisi yang dinyatakan oleh dua sumbu. Umumnya kita sebut sumbu *x* dan sumbu *y*. Dalam ruang tiga dimensi terdapat sumbu ketiga yang biasanya kita sebut sumbu *z*. Terdapat dua konvensi dalam merepresentasikan suatu titik**: kaidah tangan kanan** dan **kaidah tangan kiri**. Dalam kaidah tangan kanan jika sumbu *x* positif mengarah ke kanan dan sumbu *y* positif mengarah ke atas maka sumbu *z* positif mengarah mendekati kita sementara dalam kaidah lengan kiri sumbu *z* positif mengarah menjauhi kita.



Transformasi-transformasi geometris yang dasar di ruang tiga dimensi sama halnya dengan di ruang dua dimensi kecuali

- rotasi kita perlu membedakan rotasi terhadap masing-masing sumbu
- refleksi adalah terhadap bidang-bidang *xy*, *yz*, atau *zx*, dan
- shear adalah terhadap dua sumbu, misalnya *x* & *z*.

Demikian pula kita dapat memanfaatkan sistem koordinat homogen untuk suatu titik (*x*, *y*, *z*) dalam ruang tiga dimensi direpresentasikan sebagai matriks kolom [*x y z h*]. Selanjutnya setiap transformasi dasar dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriks translasi yang mentranslasikan titik sejauh (t_x, t_y, t_z)

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks rotasi terhadap sumbu z adalah pada dasarnya mengakibatkan rotasi seperti halnyapada rotasi dua dimensi karena komponen-*z* nya tetap. Jadi Matriks rotasi terhadap sumbu-*z* dengan sudut a adalah:

$$Rz(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks rotasi terhadap sumbu-x dengan sudut a adalah mentransposisi x menjadi y, y menjadi z, dan z menjadi x adalah:

$$R_x(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sementara matriks rotasi terhadap sumbu-y dengan sudut a adalah:

$$R_y(a) = \begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks skala dengan faktor-faktor skala (s_x, s_y, s_z) adalah:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks refleksi terhadap bidang-xy (hanya komponen z yang berubah), bidang-yz dan bidang-zx adalah:

$$Ref_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Ref_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Ref_{zx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks transformasi pada shear pada sumbu-sumbu x dan y adalah $Sh_{xy}(h_x, h_y)$ adalah

$$Sh_{xy}(h_x, h_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h_z & 0 \\ 0 & 1 & h_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

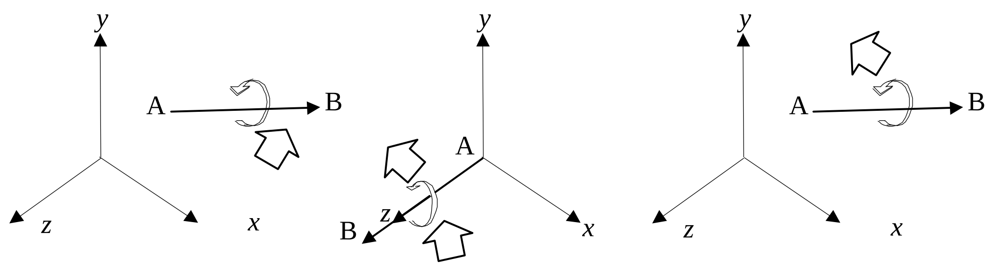
Transformasi Komposit

Seperti juga transformasi geometris dua dimensi, setiap transformasi geometris tiga dimensi pada dasarnya merupakan hasil komposisi dari sejumlah transformasi dasar tersebut. Dengan demikian matriks transformasinya juga merupakan hasil perkalian dari matriks-matriks transformasi dasarnya. Bila transformasi dasarnya berturut-turut adalah M_1, M_2, …, M_n, maka matriks transformasi kompositnya adalah

$$M_{\text{komposit}} = M_n \,.\, \ldots \,.\, M_2 \,.\, M_1$$

Contoh: rotasi suatu obyek sebesar a terhadap garis AB sebagai sumbu rotasinya. A pada (x_A, y_A, z_A) dan B pada (x_B, y_B, z_B) dan garis AB tidak sejajar dengan salah satu sumbu koordinat.

Masalah ini dapat dilakukan dengan: (1) melakukan pemindahan AB kesumbu-z positif lalu (2) melakukan rotasi a pada sumbu tersebut lalu kemudian (3) memindahkan kembali AB ke posisi semula.



Lebih lanjut diuraikan menjadi sejumlah transformasi dasar yang terjadi pada titik tersebut, sbb.:

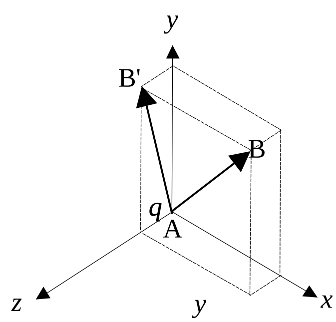
- Translasi salah satu ujung garis sumbu rotasi, misalnya A, ke titik origin : $T(-x_A, -y_A, -z_A)$
- Rotasi terhadap sumbu-*x* dengan sudut q tertentu sehingga AB berimpit pada bidang-*zx* : $R_x(q)$
- Rotasi terhadap sumbu-*y* dengan sudut f tertentu sehingga AB berimpit dengan sumbu-*z* : $R_y(f)$
- Rotasi terhadap sumbu-z dengan sudut a : $R_z(a)$
- Rotasi terhadap sumbu-*y* dengan sudut $-f$: $R_x(-f)$
- Rotasi terhadap sumbu-*x* dengan sudut $-q$: $R_x(-q)$
- Translasi ke posisi AB semula: $T(x_A, y_A, z_A)$

Sehingga matriks transformasi kompositnya adalah:

$$R_{AB}(a) = T(x_A, y_A, z_A)\ .\ R_x(-q).\ R_x(-f).\ R_z(a).\ R_y(f).\ R_x(q).\ T(-x_A, -y_A, -z_A)$$

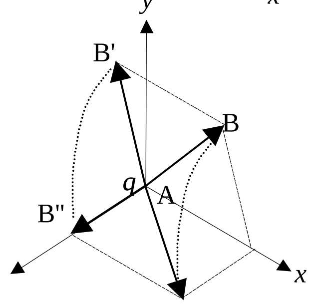
Lalu berapakah q dan f ? Kita coba mencarinya secara analitis sebagai berikut ini. Perhatikan gambar berikutyang menunjukkan AB setelah A berada pada titik origin.

Pada saat ini B berada di $(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$. Proyeksi AB pada bidang-*yz* adalah AB' dengan B' berada pada $(0, y_B-y_A, z_B-z_A)$. Rotasi terhadap sumbu-*x* AB agar berimpit dengan bidang-zx adalah juga merotasikan garis AB' terhadap sumbu-*x* hingga berimpit dengan smbu-*z* positif (menjadi AB") yaitu dengan sudut q yang terbentuk antar AB' dengan sumbu-*z* positif. Kita tidak perlu menghitung berapa q karena yang kita perlukan untuk matriks $R_x(q)$ adalah harga sinus dan cosinus-nya.Dalam hubungan ini maka $\sin(q)$ dan $\cos(q)$ dapat diperoleh:



$$\sin(q) = \frac{y_B - y_A}{AB'} = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

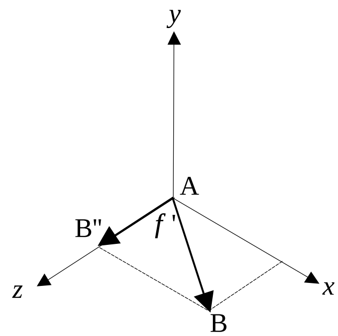
$$\cos(q) = \frac{z_B - z_A}{AB'} = \frac{z_B - z_A}{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$



Setalah berotasi maka garis AB berada di bidang-*zx* dan sekarang AB dengan sumbu-*z* positif mengapit sudut f ' dan AB" merupakan proyeksi AB pada sumbu-*z* tsb. Kita telah ketahui bahwa panjang AB" sama dengan panjang AB' (atau |AB"| = |AB'|) dan B"B adalah (x_B-x_A), sehingga

$$\sin(f') = \frac{|B"B|}{|AB|} = \frac{x_B - x_A}{\;}$$

$$\cos(f') = \frac{|AB"|}{|AB|} = \frac{\sqrt{(y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$



Rotasi terhadap sumbu-*y* yang akan dilakukan dengan sudut f yang adalah sama dengan (360^o - f'). Karena

$\sin(f) = \sin(360^o - f') = \sin(-f') = -\sin(f')$

$\cos(f) = \cos(360^o - f') = \cos(-f') = \cos(f')$

maka tanpa mencari f matriks transformasi untuk $R_y(f)$ dapat diperoleh.

Selanjutnya $R_x(-q)$ dan $R_y(-f)$ dapat dihitung dari hubungan $\sin(-q) = -\sin(q)$ dan $\cos(-q) = \cos(q)$.

Catatan: analisis menjadi transfomasi-transformasi dasarnya tidaklah unik. Analisis dengan urutan yang lain bisa menghasilkan deretan matriks transformasi dasar yang berbeda. Misalnya transformasi di atas dapat diuraikan menjadi (1) translasi ke titik origin, (2) rotasi terhadap sumbu *y* dahulu baru kemudian (3)rotasi terhadap sumbu-*x*, dan seterutnya. Tentu saja besarnya sudut-sudut rotasi tersebut menjadi lain. Dalam buku teks diberikan contoh lain yang semacam yang melakukan urutan transformasi dasar seperti itu.